47

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 $m,\ n$ からなる組 $(m,\ n)$ で,
$x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

（2009 東京工業大学）

解法 1

$x^2-nx+m=0$ の 2 実数解を $\alpha,\ \beta$ とする。

【1】$\alpha>N,\ \beta>N$ のとき

$\alpha+\beta>2N$，解と係数の関係より $\alpha+\beta=n$　$\therefore n>2N$

これは n が $2N$ 以下の整数であることに反するから $\alpha>N,\ \beta>N$ は不適である。

【2】$\alpha=N$ のとき

$x^2-nx+m=0$ の判別式を D とすると，$D\geq 0$ より，$n^2-4m\geq 0$　・・・①

解と係数の関係より，$N+\beta=n,\ N\beta=m$　・・・②

①，②より，$(N+\beta)^2-4N\beta=(N-\beta)^2\geq 0$　$\therefore \beta=N$

ゆえに，N を実数解にもつとき，その解は重解であり，これより $n=2N,\ m=N^2$

これと $1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ より，$1\leq 2N\leq 2N,\ 1\leq N^2\leq 2N$　$\therefore N=1,\ 2$

ゆえに，$(n,\ m)$ は $(2,\ 1),\ (2,\ 4)$ の 2 組

【3】N が α と β の間の数のとき

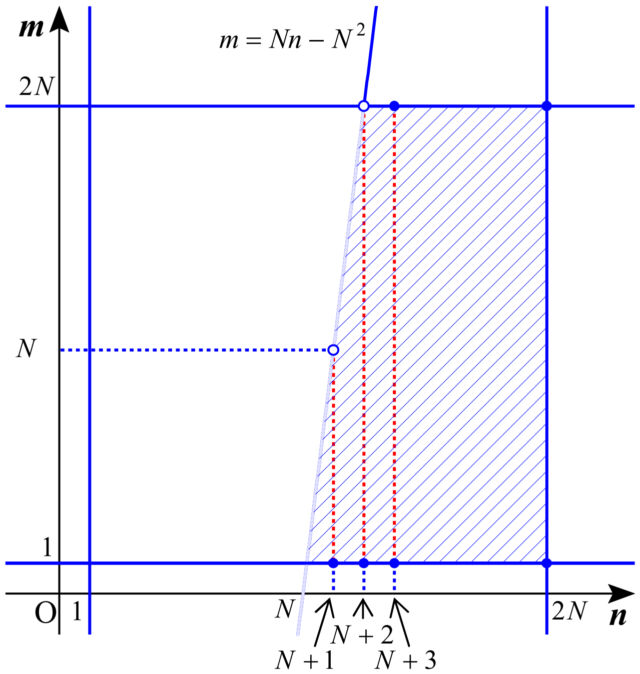
$y=x^2-nx+m$ と x 軸の共有点の x 座標と $x^2-nx+m=0$ の解が一致するから，

中間値の定理より，$N^2-nN+m<0$　$\therefore m<Nn-N^2$

したがって，$m=Nn-N^2$ を m を n の関数と見て，$m<Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N$，$1\leq m\leq 2N$ を満たす領域の格子点の数，すなわち $(n,\ m)$ の組の数を求めればよい。

よって，図より，$(n,\ m)$ の組の数は

$$\{(N-1)-1+1\}+\{(2N-1)-1+1\}+(2N-1+1)\{2N-(N+3)+1\}=2N^2-N-2$$



【1】～【3】より，$(m,\ n)$ の組の総数は $2+2N^2-N-2=2N^2-N$　・・・(答)

解法 2

$x^2-nx+m=0$ の判別式を D とすると，

実数解条件は $D=n^2-4m\geq 0 \quad \therefore m\leq\dfrac{n^2}{4}$ ・・・①

①が成り立つ下で，2 つ実数解がいずれも N より小さいときの必要十分条件を求める。

2 つ実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，$\alpha<N,\ \beta<N$ より，$\alpha-N<0,\ \beta-N<0$

$\alpha-N<0,\ \beta-N<0$ と $(\alpha-N)+(\beta-N)<0,\ (\alpha-N)(\beta-N)>0$ は必要十分の関係であり，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=n,\ \alpha\beta=m$ であることから，

2 つ実数解がいずれも N より小さいときの必要十分条件は

$(\alpha-N)+(\beta-N)=(\alpha+\beta)-2N=n-2N<0 \quad \therefore n<2N$ ・・・②

$(\alpha-N)(\beta-N)=\alpha\beta-N(\alpha+\beta)+N^2=m-Nn+N^2>0 \quad \therefore m>Nn-N^2$ ・・・③

より，

②かつ③が，すなわち $(n<2N)\cap(m>Nn-N^2)$ ・・・④ が成り立つことである。

少なくとも 1 つの解が N 以上であるための条件を求める。

条件は $① \cap \overline{④}$ （$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$）

これと

$$\begin{aligned}\overline{④}&=\overline{(n<2N)\cap(m>Nn-N^2)}\\&=\overline{(n<2N)}\cup\overline{(m>Nn-N^2)}\\&=(n\geq 2N)\cup(m\leq Nn-N^2)\end{aligned}$$

より，

$$① \cap \overline{④}=\left(m\leq\frac{n^2}{4}\right)\cap\{(n\geq 2N)\cup(m\leq Nn-N^2)\}$$

これに条件 $1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ を加えることにより，

条件は，$m\leq\dfrac{n^2}{4}$，$m\leq Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$

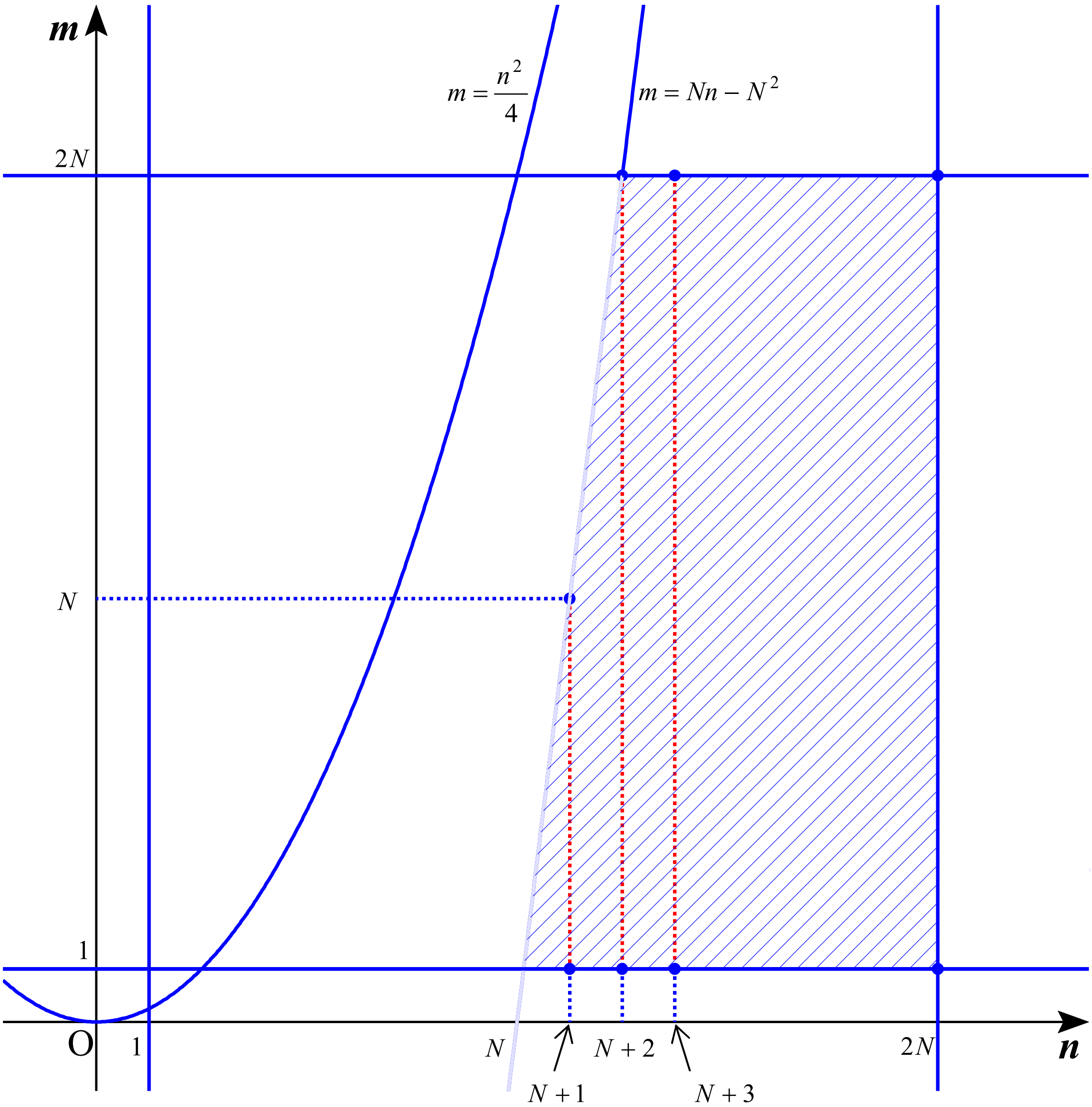
$(m,\ n)$ の組の数

$m\leq\dfrac{n^2}{4}$，$m\leq Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ を nm 座標平面上に表し，

格子点の数，すなわち $(m,\ n)$ の組の数を求めればよい。

よって，次ページの図の斜線部の格子点の数より，$(m,\ n)$ の組の数は

$\{(N-1)+1\}+(2N-1+1)\{2N-(N+2)+1\}=2N^2-N$ ・・・(答)


m
$m=\frac{n^2}{4}$
$m=Nn-N^2$
2N
N
1
O
1
N
N + 1
N + 2
N + 3
2N
n